Barycentres

Barycentre de deux points A et B affectés des coefficients réels α et β (on suppose $\alpha + \beta \neq 0$ sinon le barycentre n'existe pas)

$$\boxed{G = bar[A(\alpha); B(\beta)] \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$$

- Le barycentre de deux points se trouve toujours du côté du point « le plus lourd en valeur absolue »
- L'*isobarycentre* de A et B (cas $\alpha = \beta$) est le milieu de A et B
- Les égalités sont vraies en *mesure algébrique* : $\dfrac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (on dit que G divise $[AB]$ dans le rapport $-\dfrac{\beta}{\alpha}$)
- Pour tout point M du plan, on a : $\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}$
- Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $\boxed{G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right)}$ (dans l'espace, il suffit d'ajouter la cote)

Barycentre de n points (cas général) On considère n points A_1, A_2, $\cdots$, A_n affectés des coefficients α_1, α_2, $\cdots$, α_n avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$

$$\boxed{G = bar[A_1(\alpha_1); A_2(\alpha_2); \cdot; A_n(\alpha_n)] \Leftrightarrow \alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}}$$

- Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, on note $G = isobar[A_1; A_2; \cdots; A_n]$ et on peut supposer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$ en vertu de la propriété d'*homogénéité* (voir plus bas).
- Pour tout point M du plan, on a :

$$\boxed{\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}}$$

- Si $A_1(x_{A_1}; y_{A_1})$, $A_2(x_{A_2}; y_{A_2})$, $\cdots$, $A_n(x_{A_n}; y_{A_n})$ alors :

$$\boxed{G\left(\frac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \cdots + \alpha_n x_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}; \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \cdots + \alpha_n y_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\right)}$$

(dans l'espace, il suffit d'ajouter la cote)

Propriétés du barycentre

1. **Commutativité** : le barycentre d'un système de points est indépendant de l'ordre des points.
2. **Homogénéité** : le barycentre d'un système de points est inchangé si l'on multiplie tous les coefficients par un même réel non nul.
3. **Associativité** : le barycentre d'un système de points est inchangé si l'on remplace plusieurs des points par leur *barycentre partiel* (s'il existe !), affecté d'un coefficient égal à la somme des coefficients des points dont il est le barycentre partiel.

Remarque La troisième propriété (« associativité ») est très importante car elle permet de construire de proche en proche le barycentre de n points en les prenant deux par deux.

Exemple 1 Si $G = bar[A(3); B(4); C(5)]$, alors $G = bar[G'(7); C(5)]$ avec $G' = bar[A(3); B(4)]$.

Exemple 2 (« extraction »d'un barycentre) Si $G = bar[A(\alpha); B(\beta); C(\gamma)]$, alors :
$A = bar[G(-\alpha - \beta - \gamma); B(\beta); C(\gamma)]$.